Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 2 - Ejemplos de espacios normados

1. Sean p, q, r números reales positivos tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Prueba que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \quad (x \in \ell_p, y \in \ell_q)$$

   Sugerencia. Basta aplicar una vez la desigualdad de Hölder.

2. Prueba que la sucesión $\{e_{n-1}\}$, donde e_0 es la sucesión constante igual a 1 y, para $n \in \mathbb{N}$, los e_n son los vectores unidad, es una base de Schauder de c.

3. Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de números positivos y $\{\sigma(n)\}$ una sucesión de números naturales. Sea

$$x_n = \rho_n \sum_{k=1}^{\sigma(n)} \mathrm{e}_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   donde $\{\mathrm{e}_n\}$ es la sucesión de los vectores unidad. Calcula la norma de x_n en ℓ_p para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

4. Da un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}$:

   a) Que converja a cero en ℓ_∞ pero no esté acotada en ℓ_1 ni en ℓ_2.

   b) Que converja a cero en ℓ_2 pero no esté acotada en ℓ_1.

   c) Que converja en c_0 con límite no nulo pero no converja en ℓ_2.

5. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos y $1 \leqslant p < \infty$. Prueba que el conjunto:

$$P = \{x \in \ell_p : |x(n)| < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

   a) Es abierto en ℓ_p si, y sólo si, $\operatorname{ínf}\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

   b) Está acotado en ℓ_p si, y sólo si, $\{a_n\} \in \ell_p$.

6. Estudia si el conjunto de las funciones polinómicas es cerrado o abierto en $(C[-1,1], \| \ \|_\infty)$.

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean f_n y g_n las funciones definidas para todo $t \in [0,1]$ por:

$$f_n(t) = t^n - t^{n+1}, \qquad g_n(t) = t^n - t^{2n}$$

   Estudia la convergencia de las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ en los espacios $C[0,1]$ y $L_p[0,1]$ para $(1 \leqslant p < \infty)$.

8. Prueba que el espacio de las sucesiones convergentes con la norma uniforme, $(c, \| \ \|_\infty)$, es un espacio de Banach.

9. Prueba que el espacio $C([-1,1],\mathbb{R})$ con la norma $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$ donde $p \geqslant 1$ no es completo.

10. Prueba que el conjunto de todas las funciones lipchicianas de $[0,1]$ en $\mathbb{K}$ con la norma

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|} : s,t \in [0,1], s \neq t\right\}$$

es un espacio de Banach.

11. En ℓ_∞ se define una norma por

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{2^n}$$

Estudia si ℓ_∞ con dicha norma es un espacio de Banach.

12. Sea S_c el espacio de las sucesiones cuya serie es convergente:

$$S_c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geqslant 1} x(n) \text{ es convergente} \right\}$$

Para $x \in S_c$ definamos $\|x\| = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} x(k)\right| : n \in \mathbb{N}\right\}$. Prueba que $(S_c, \|\ \|)$ es un espacio de Banach.

13. Supongamos que $0 < L < \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. Prueba que la ecuación

$$f(x) - \int_0^L \sqrt{1+(x-y)^2}\cos(f(y))\,\mathrm{d}y = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^x) \quad (x \in [0,L])$$

tiene una solución única $f \in C([0,L],\mathbb{R})$.